ЕВРАЗИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ

www.esa-conference.ru

УДК 517.51

Наилучшее приближение ступенчатыми функциями в метрике квадратичного отклонения для плотности распределения Лапласа

Пастухов Ю.Ф., Пастухов А.Ю., Пастухов Д.Ф.

Предложен метод нахождения наилучшего приближения плотности для монотонно-убывающих функций в пространстве ступенчатых функций в метрике квадратичного отклонения на заданном интервале и применен для плотности распределения Лапласа. Работа может быть полезна для специалистов по цифровой обработке сигналов.

1. Наилучшее приближение(квантование) функции в метрике квадратичного отклонения

Определение. Пусть $m \in N$. Функция $f_m:[a,b] \to R(a<b)$ называется m-кусочно-постоянной на [a,b], если $\exists\, x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1}$ такие что: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < b = x_m$,
$f_m(x) = y_i = const\ \forall x \in (x_{i-1}, x_i),\ f_m(x_i) = y_i,\ f_m(x_{i+1}) = y_{i+1}\ y_i \neq y_{i+1},\ \forall i = \overline{1, m-1}$.

Множество $m-$ ступенчатых функций ($m-$ уровней) $f_m:[a,b] \to R(a<b)$ обозначим как $S_m[a,b]$.

Пусть $f:[a,b] \to \Re$, $f \in C^2[a,b]$, $f'(x) < 0\ \forall x \in [a,b], m \in N$. Для минимизации ошибки квантования требуется в пространстве $m-$ступенчатых функций найти наилучшее приближение $h_m:[a,b] \to R$ функции $f:[a,b] \to \Re$ в метрике квадратичного отклонения, такое что $dist = \|f - h_m\|_{C^2_{[a,b]}} = \min\limits_{f_m \in S_m[a,b]} \|f - f_m\|_{C^2_{[a,b]}}$. С учетом этого, расстояние оценивается как:

$$dist = \|f - h_m\|_{C^2_{[a,b]}} = \sqrt{\int_a^b (f(x) - h_m(x))^2 dx} = \min_{f_m \in S_m[a,b]} \sqrt{\int_a^b (f(x) - f_m(x))^2 dx} = \min_{f_m \in S_m[a,b]} \|f - f_m\|_{C^2_{[a,b]}}$$

Пусть ступенчатая функция $h_m(x) = y_k$ равна константе на отрезке $x \in (x_{k-1}, x_k)$, $k = \overline{1, m}$, при этом функция ошибки $G\left(x_1, \ldots, x_{m-1}, y_1, \ldots, y_m\right) = \sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \left(f(x) - y_k\right)^2 dx$ описывает квадрат отклонения ступенчатой функции $h_m:[a,b] \to R$ от функции нормального распределения $f:[a,b] \to \Re$. Необходимое условие экстремума функции $G\left(x_1, \ldots, x_{m-1}, y_1, \ldots, y_m\right)$ описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial G\left(x_1, \ldots, x_{m-1}, y_1, \ldots, y_m\right)}{\partial x_i} \equiv G'_{x_i} = 0, i = \overline{1, m-1},\ G'_{y_i} = 0,\ \ i = \overline{1, m}\ , \tag{1}$$

Отсюда следует :

$$\begin{cases} f(B_i) = \dfrac{1}{2}(C_i + C_{i+1}),\ i = \overline{1, n-1} \\ f(B_i) = \dfrac{1}{2} C_n \\ \int\limits_{B_{j-1}}^{B_j} f(x)dx = C_j(B_j - B_{j-1}),\ \ j = \overline{1, n} \end{cases} \tag{2}$$

Для n+1 ненулевой ступеньки система (1) имеет вид :

$$\begin{cases} f(B_i) = \dfrac{1}{2}(C_i + C_{i+1}),\ i = \overline{1, n} \\ \int\limits_{B_{j-1}}^{B_j} f(x)dx = C_j(B_j - B_{j-1}),\ \ j = \overline{1, n+1} \end{cases} \tag{3}$$

И содержит 2n+1 уравнений и 2n+1 неизвестных.

В работе при вычислении интегралов был использован алгоритм для составной интегральной квадратурной формулы с 16 порядком погрешности, когда исходный отрезок интегрирования делится на число частей кратное четырнадцати (15 узлов равномерной сетки на каждой части). C_i, x_i, r - соответственно веса, узлы и невязка квадратурной формулы.

$$\int_a^b f(z)dz = \sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i) + r(f) \tag{4}$$

Интегрируя степенные координатные функции z^{2s} на каноническом отрезке[-1,1], $n_0 = 14$ число частей, на которое делится отрезок[-1,1], учитывая симметрию весов относительно центрального узла $z = 0$ получим:

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} dz = 2 = C_0 + 2\sum_{k=1}^{n_0/2} C_k \\ \int_{-1}^{1} z^{2s} dz = 2/(2s+1) = 2\sum_{k=1}^{n_0/2} C_k \left(2k/n_0\right)^{2s}, s = \overline{1, n_0/2} \end{cases} \quad (5)$$

Для канонического отрезка [-1,1] запишем квадратурную формулу в виде эквивалентном (4)

$$\int_{-1}^{1} f(z)dz = \frac{hn_0}{2}\sum_{i=0}^{n_0} C_i f(x_i) = 7h\sum_{i=0}^{14} C_i f(x_i), \quad \frac{hn_0}{2} = 1, x_i = -1 + ih, i = \overline{0, n_0} \quad (6)$$

Где h – шаг интегрирования, $n_0 = 14$ число отрезков, на которое делится канонический отрезок [-1,1] и каждая часть из k в составной формуле исходного отрезка [a,b] .

А определённый интеграл на отрезке $[a,b]$ отличается от(6) на отрезке [-1,1] длиной интервала в $k = n/n_0 = \frac{b-a}{2}$ раз, используем замену переменных и формулу(4)

$$x = \frac{b+a}{2} + \left(\frac{b-a}{2}\right)z, a \le x \le b, -1 \le z \le 1, dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)dz = kdz$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(z)\left(\frac{b-a}{2}\right)dz = \frac{hn_0}{2}\sum_{i=0}^{n_0 * k} C_i f(x_i), \sum_{i=0}^{n_0} C_i = 2, h = \frac{b-a}{n}, hn = b-a, x_i = a + ih, i = \overline{0, n}$$

Разбивая канонический отрезок[-1,1] $n_0 = 14$ равных частей (из соображений удобства разбиения), используя симметрию весовых коэффициентов, можно получить решение системы уравнений(5) ($n_0 = 14$), в которой 6 неизвестных коэффициентов C_0, C_1, C_2, C_3 C_4, C_5 C_6, C_7, C_8 являются решением системы $n_0/2 + 1 = 8$ линейных неоднородных уравнений с 15 алгебраическим порядком точности:

$$\begin{cases} C_0 = \frac{90241897}{2501928000}, C_1 = \frac{44436679}{156370500}, C_2 = -\frac{770720657}{2501928000}, C_3 = \frac{109420087}{78185250}, C_4 = -\frac{6625093363}{2501928000} \\ C_5 = \frac{789382601}{156370500}, C_6 = -\frac{5600756791}{833976000}, C_7 = \frac{101741867}{13030875}, C_8 = \frac{90241897}{1250964000} \end{cases} \quad (7)$$

Проверим на компьютере, что рациональный вид коэффициентов (7)(символьное решение системы (5) для $n_0 = 14$) удовлетворяет с двойной точностью(16 значащих цифр). В таблице 1 в левой части указано точное значение интеграла $a(s) = \int_{-1}^{1} z^s dz, s = \overline{0,16}$, а справа численное значение правой части уравнений системы (5) - $b(s)$ с использованием значений весовых коэффициентов (7) (s – показатель степенной функции).

Таблица 1. **Сравнение интеграла от координатной степенной функции и квадратурной интегральной формулы**

a(0)=2.0000000000000000	b(0)=2.0000000000000009
a(1)=0.0000000000000000	b(1)=0.0000000000000001
a(2)=0.6666666666666666	b(2)=0.6666666666666665
a(3)=0.0000000000000000	b(3)=0.0000000000000000
a(4)=0.4000000000000000	b(4)=0.4000000000000000
a(5)=0.0000000000000000	b(5)=0.0000000000000000
a(6)=0.2857142857142857	b(6)=0.2857142857142856
a(7)=0.0000000000000000	b(7)=0.0000000000000000
a(8)=0.2222222222222222	b(8)=0.2222222222222221
a(9)=0.0000000000000000	b(9)=0.0000000000000000
a(10)=0.1818181818181818	b(10)=0.1818181818181817
a(11)=0.0000000000000000	b(11)=0.0000000000000000
a(12)=0.1538461538461539	b(12)=0.1538461538461538
a(13)=0.0000000000000000	b(13)=0.0000000000000000
a(14)=0.1333333333333333	a(14)=0.1333333333333333
a(15)=0.0000000000000000	b(15)=0.0000000000000000
a(16)=0.1176470588235294	b(16)=0.1179107308149041

Из таблицы 1 видно, что алгебраический порядок точности системы уравнений (5) при $n_0 = 14$ равен 15, а порядок погрешности квадратурной формулы $\int_{-1}^{1} f(z)dz = 7h\sum_{i=0}^{14} C_i f(x_i), 7h = 1, \sum_{i=0}^{14} C_i = 2, x_i = -1 + ih, i = \overline{0,14}$ равен 16(C_i определяются с помощью (7)).

Из (6) для $n_0 = 14$ получим составную формулу:

$$\int_a^b f(z)dz = 7h\sum_{i=0}^{n} C_i f(x_i), h = \frac{(b-a)}{n}, \sum_{i=0}^{14} C_i = 2, x_i = a + ih, n = 14k \quad (8)$$

в которой весовые коэффициенты C_i определяются алгоритмом (9):

$$\begin{cases} \text{если } j = 0 \text{ или } j = n : C_j = \frac{90241897}{2501928000}; \\ \text{если } j \equiv 1 \bmod 14 \text{ или } j \equiv 13 \bmod 14 : C_j = \frac{44436679}{156370500}; \\ \text{если } j \equiv 2 \bmod 14 \text{ или } j \equiv 12 \bmod 14 : C_j = -\frac{770720657}{2501928000}; \\ \text{если } j \equiv 3 \bmod 14 \text{ или } j \equiv 11 \bmod 14 : C_j = \frac{109420087}{78185250}; \\ \text{если } j \equiv 4 \bmod 14 \text{ или } j \equiv 10 \bmod 14 : C_j = -\frac{6625093363}{2501928000}; \\ \text{если } j \equiv 5 \bmod 14 \text{ или } j \equiv 9 \bmod 14 : C_j = \frac{789382601}{156370500}; \\ \text{если } j \equiv 6 \bmod 14 \text{ или } j \equiv 8 \bmod 14 : C_j = -\frac{5600756791}{833976000} \\ \text{если } j \equiv 7 \bmod 14 : C_j = \frac{101741867}{13030875} \\ \text{если } j \equiv 0 \bmod 14 , j > 0, j < n : C_j = \frac{90241897}{1250964000} \end{cases} \quad (9)$$

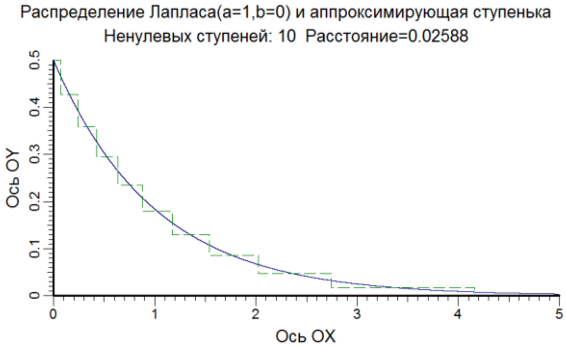
Методы точных вычислений в стеганогафии описаны также в работах[6-9].

Для исследования рассмотренного алгоритма разработана программа, которая позволяет получать пороговые уровни и ошибку приближения для различного числа n (таблица 2) с учетом интегральных квадратурных формул(8, 9).

Таблица 2. **Результаты исследований ошибки приближения плотности распределения Лапласа для различного количества ступеней**

n	8	16	32	64	128
G= dist^2	1.032*10^{-3}	2,72* 10^{-4}	6,78* 10^{-5}	2,01* 10^{-5}	5,05* 10^{-6}
dist	3,21* 10^{-2}	1,65* 10^{-2}	8,23* 10^{-3}	4,48* 10^{-3}	2,25* 10^{-3}

На рисунке 1 представлен пример приближения функции плотности распределения Лапласа $f(x) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x-\beta|}$ *при* $\alpha = 1$, $\beta = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ на основе предложенного подхода в метрике квадратичного отклонения для числа ступеней а)m=10 и б)m=20.(на одну сторону). Полученные значения пороговых уровней для n=20(m=10 ступеней): 0 ; 0.075 ; 0.156 ; 0.239 ; 0.331 ; 0.424 ; 0.528 ; 0.635 ; 0.756 ; 0.881 ; 1.025 ; 1.175 ; 1.352 ; 1.541 ; 1.774 ; 2.027 ; 2.365 ; 2.747 ; 3.371 ; 4.160



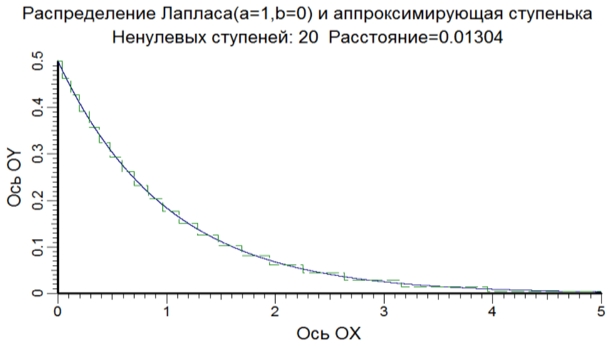


Рис. 1. **Результат квантования: а) для m=10; б) для m=20**

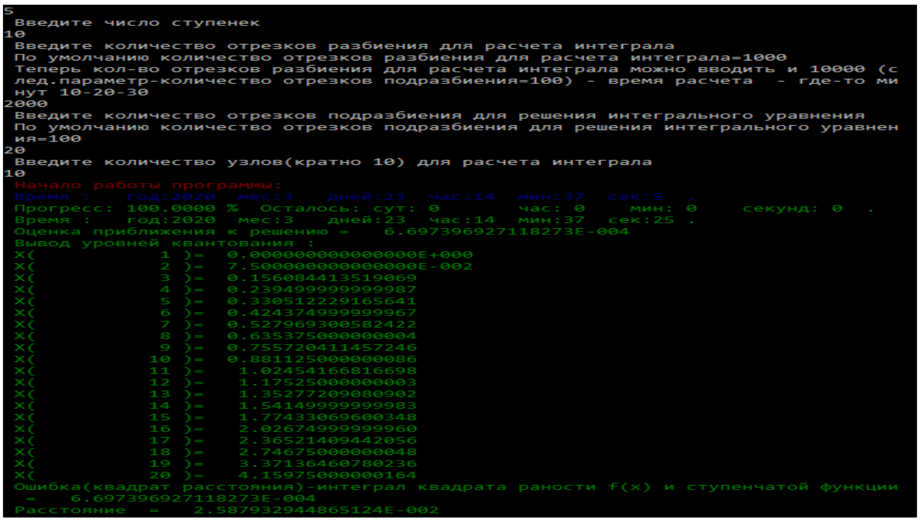


Рис. 3. **Уровни квантования плотности распределения Лапласа для m=10**

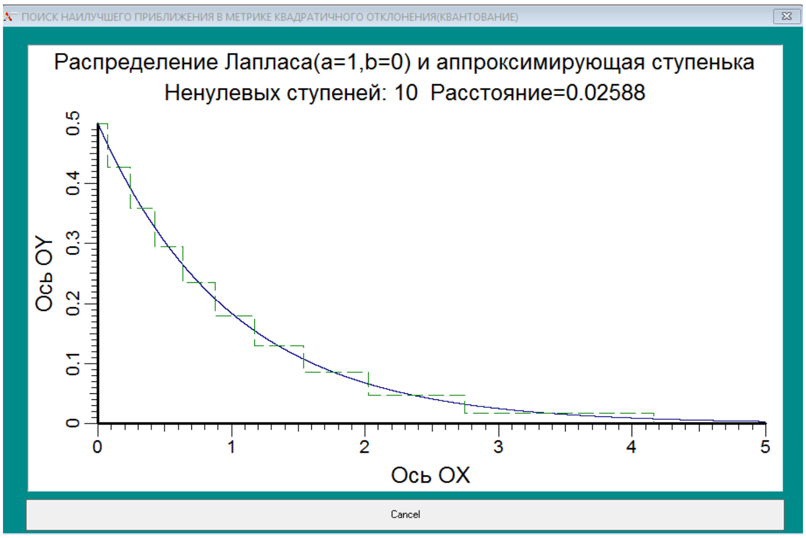


Рис. 3. **График уровней квантования: для m=10**

На рисунке 3 приведен результат работы программы для поиска оптимальных уровней квантования для числа ступеней m=10

Литература:

1. Пастухов Ю.Ф. Необходимые условия в обратной вариационной задаче / Ю.Ф. Пастухов // Фундаментальная и прикладная математика,7:1(2001), 285-288
2. Пастухов Ю.Ф. Группы преобразований, сохраняющие вариационную задачу со старшими производными//Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов// Вестник Полоцкого государственного университета. Серия C, Фундаментальные науки. - 2018. -№ 4. - С. 194.
3. Пастухов Ю.Ф. Лагранжевы сечения / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия C, Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 75–99.
4. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии. [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополоцк: ПГУ, 2018. – Режим доступа: http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/22094 – Дата доступа: 04.07.2018.
5. Пастухов Ю.Ф Сборник статей по дифференциальной геометрии 2. [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополоцк: ПГУ, 2019. – Режим доступа: http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/23288. – Дата доступа: 26.03.2019.
6. Пастухов Ю.Ф. Сборник статей по дифференциальной геометрии (3-е издание) [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополоцк: ПГУ, 2020. – Режим доступа: http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/24448. – Дата доступа: 13.03.2020.
7. Пастухов Ю.Ф. Свойства функции Гамильтона в вариационных задачах со старшими производными / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия C, Фундаментальные науки. – 2018. – № 4. – С. 137-153.
8. Пастухов Ю.Ф. Обратная теорема Гамильтона / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф Пастухов // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия C, Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С. 86-100.

9. Пастухов Ю.Ф. Тензор обобщенной энергии//Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов, С. В. Чернов //Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. - 2017. -№ 12. - С. 78-100.

10. Пастухов, Ю.Ф. Инварианты в расслоениях скоростей произвольного порядка/ Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов, Голубева О. В. // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2015. –№ 12. – С. 117–123.

11. Пастухов Ю.Ф. Об интегралах обобщенной энергии на экстремалях системы уравнений Эйлера-Лагранжа [Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. – Новополоцк: ПГУ, 2020. – Режим доступа: http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/24421. – Дата доступа: 26.02.2020.

12. Пастухов, Ю.Ф. Обобщение теоремы Гамильтона – Остроградского в расслоениях скоростей произвольного порядка / Ю.Ф. Пастухов [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2016. – № 12. – С. 125–133.

13. Пастухов, Ю.Ф. Закон преобразования обобщенного импульса / Ю.Ф. Пастухов [и др.] // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки. – 2017. – № 4. – С. 85–99.

14. Пастухов Д.Ф. К вопросу о редукции неоднородной краевой задачи Дирихле для волнового уравнения на отрезке/ Пастухов, Д. Ф.; Пастухов, Ю. Ф.; Волосова, Н. К. // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2018. – № 12. – С.60–74.

15. Пастухов, Д. Ф. Оптимальный параметр аппроксимации разностной схемы волнового уравнения на отрезке /Пастухов Д. Ф., Пастухов Ю. Ф., Волосова Н. К.// Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. - 2018. -№4. С. 167-186.

16. Пастухов Д.Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности / Д.Ф.Пастухов, Ю.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2017. – № 12. – С. 62–77.

17. Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф., Богуш Р.П., Пастухов А.Ю. Определение оптимальных уровней восстановления и квантования плотности нормального распределения в метрике квадратичного отклонения для алгоритма сжатия данных/ Пастухов Ю.Ф. //Евразийское Научное Объединение. 2018. Т. 1. № 11(45). С. 16-21.

18. Пастухов Д.Ф. Минимальная разностная схема для уравнения Пуассона на параллелепипеде с шестым порядком погрешности / Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 154–173.

19. Пастухов, Ю.Ф. Задача построения поля линий тока по температурному разрезу / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2015. –№ 4. – С. 27–36.

20. Пастухов Ю. Ф., Пастухов Д. Ф., Богуш Р. П. Квантование функции плотности нормального распределения в метрике квадратичного отклонения. В сборнике: Информационно-коммуникационные технологии: достижения, проблемы, инновации (ИКТ-2018) Электронный сборник статей I международной научно-практической конференции, посвященной 50-летию Полоцкого государственного университета. 2018. С. 92-95.

21. Герец, А. Ю. Согласование порядков аппроксимации дифференциального и граничного операторов в краевой задаче для уравнений в частных производных/ А. Ю. Герец, А. А. Зеленкевич, Н. А. Гурьева, Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов// Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. 2015.№12. С. 102-109.

22. Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.,Волосова Н.К.,Волосов К.А.,Волосова А.К. Сборник статей по численным методам. Аппроксимация повышенной точности и устойчивость разностных схем в уравнениях с частными производными: учебное пособие/ Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, Волосова Н.К., Волосов К. А., Волосова А. К. - 3 - е изд., - Новополоцк: ПГУ, 2020. – 156 с.)[Электронный ресурс] / Ю.Ф. Пастухов, Д.Ф. Пастухов. Волосова Н.К., Волосов К. А., Волосова А. К. – Новополоцк: ПГУ, 2020. – Режим доступа: http://elib.psu.by:8080/handle/123456789/24447. – Дата доступа: 13.03.2020.